

POVM e o teorema de Neumark

Salomon S Mizrahi
DF-UFSCar

January 21, 2008

Abstract

Seminário do grupo de OQIQ

1. O projetor no espaço \mathcal{H}_2 de Hilbert

O conjunto de vetores normalizados que varrem o espaço de Hilbert \mathcal{H}_2 são escritos como,

$$|\hat{r}\rangle = \begin{pmatrix} \cos \theta/2 \\ e^{i\phi} \sin \theta/2 \end{pmatrix}.$$

eles dependem de dois parâmetros livres, θ e ϕ , que definem a superfície de uma esfera no espaço Euclidiano \mathcal{E}_3 , onde $0 \leq \theta < \pi$ and $0 \leq \phi < 2\pi$. Fazendo a a operação de reflexão pela origem de um referencial em \mathcal{E}_3 , $\theta \rightarrow \pi - \theta$, $\phi \rightarrow \phi + \pi$, obtém-se um estado ortogonal a $|\hat{r}\rangle$ em \mathcal{H}_2 ,

$$|\hat{r}_a\rangle = \begin{pmatrix} \sin \theta/2 \\ -e^{i\phi} \cos \theta/2 \end{pmatrix},$$

$$\langle \hat{r}_a | \hat{r} \rangle = \begin{pmatrix} \sin \theta/2 & -e^{-i\phi} \cos \theta/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta/2 \\ e^{i\phi} \sin \theta/2 \end{pmatrix} = 0.$$

Um projetor em \mathcal{H}_2 é escrito como

$$\pi(\hat{r}) = |\hat{r}\rangle \langle \hat{r}| = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta/2 & e^{-i\phi} \sin \theta/2 \cos \theta/2 \\ e^{i\phi} \sin \theta/2 \cos \theta/2 & \sin^2 \theta/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (\hat{1} + \hat{r} \cdot \vec{\sigma})$$

$((\pi(\hat{r}))^2 = \pi(\hat{r}), \pi^\dagger(\hat{r}) = \pi(\hat{r}))$ com $\hat{r} = (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta)$ um vetor unitário em \mathcal{E}_3 , o vetor $\vec{\sigma}$ tem as matrizes de the Pauli como componentes cartesianas e $\hat{1}$ representa o operador (ou matriz) unidade. Obviamente $\pi(\hat{r})|\hat{r}\rangle = |\hat{r}\rangle$, ou também

$$\hat{r} \cdot \vec{\sigma} |\hat{r}\rangle = |\hat{r}\rangle,$$

logo $|\hat{r}\rangle$ é um autoestado do operador $\hat{r} \cdot \vec{\sigma}$ (\hat{r} é também chamado eixo de quantização), que tem um outro autoestado,

$$\hat{r} \cdot \vec{\sigma} |\hat{r}_a\rangle = -|\hat{r}_a\rangle.$$

O vetor $\hat{r}_a = (\sin(\pi - \theta) \cos(\phi + \pi), \sin(\pi - \theta) \sin(\phi + \pi), \cos(\pi - \theta))$ é o antípoda do vetor \hat{r} pois $\hat{r}_a \cdot \hat{r} = -1$. Também,

$$Tr(\pi(\hat{r})) = 1, \quad \hat{r} = Tr(\vec{\sigma}\pi(\hat{r})).$$

O produto de dois projetores não-ortogonais não é um projetor

$$\pi(\hat{r})\pi(\hat{r}') = |\hat{r}\rangle\langle\hat{r}|\langle\hat{r}'|\langle\hat{r}'| = \langle\hat{r}'|\hat{r}'\rangle |\hat{r}\rangle\langle\hat{r}'|$$

onde

$$\begin{aligned} \langle\hat{r}'|\hat{r}'\rangle &= \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & e^{-i\phi}\sin\theta/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta'/2 \\ e^{i\phi'}\sin\theta'/2 \end{pmatrix} \\ &= \cos\theta/2\cos\theta'/2 + e^{-i(\phi-\phi')}\sin\theta/2\sin\theta'/2 \neq \hat{r} \cdot \hat{r}' \end{aligned}$$

e denotando $|\hat{r}\rangle\langle\hat{r}'| = \hat{M}(\hat{r}, \hat{r}')$, obviamente, $\hat{M}^\dagger(\hat{r}, \hat{r}') = \hat{M}(\hat{r}', \hat{r})$ é um *filtro seletivo*, ou também, usando a relação $\vec{A} \cdot \vec{\sigma} \vec{B} \cdot \vec{\sigma} = \vec{A} \cdot \vec{B} + i\vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{\sigma}$, torna-se imediato verificar que

$$\begin{aligned} \pi(\hat{r})\pi(\hat{r}') &= \frac{1}{4}(\hat{1} + \hat{r} \cdot \vec{\sigma})(\hat{1} + \hat{r}' \cdot \vec{\sigma}) \\ &= \frac{1}{4}(\hat{1} + (\hat{r} + \hat{r}') \cdot \vec{\sigma} + \hat{r} \cdot \hat{r}'\hat{1} + i\hat{r} \times \hat{r}' \cdot \vec{\sigma}) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1 + \hat{r} \cdot \hat{r}'}{2} \hat{1} + \left(\frac{\hat{r} + \hat{r}'}{2} + i\frac{1}{2}\hat{r} \times \hat{r}' \right) \cdot \vec{\sigma} \right] \end{aligned}$$

que, claramente, não é um projetor, não obstante o anticomutador,

$$\begin{aligned} \pi(\hat{r}) \star \pi(\hat{r}') &\equiv \frac{1}{2} \{ \pi(\hat{r}), \pi(\hat{r}') \} = \frac{1 + \hat{r} \cdot \hat{r}'}{2} \left\{ \frac{1}{2} \left[\hat{1} + \left(\frac{\hat{r} + \hat{r}'}{1 + \hat{r} \cdot \hat{r}'} \right) \cdot \vec{\sigma} \right] \right\} \\ &= \frac{1 + \hat{r} \cdot \hat{r}'}{2} \pi(\hat{r}'') \end{aligned}$$

é um projetor atenuado ($(1 + \hat{r} \cdot \hat{r}')/2$ é o fator de atenuação) e o projetor é um novo ponto sobre uma esfera, agora não necessariamente unitária, há uma nova direção do vetor, que também não é mais necessariamente unitário,

$$\hat{r}'' = \frac{\hat{r} + \hat{r}'}{1 + \hat{r} \cdot \hat{r}'}$$

com propriedades

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{para } \hat{r}' = \hat{r}_a = -\hat{r} \\ \text{para } \hat{r}' = \hat{r} \\ \text{para } \hat{r}' = \hat{r}_\perp \\ \text{para } \hat{r}' \neq \pm \hat{r} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{r}'' = 0 \\ \hat{r}'' = \hat{r} \\ \hat{r}'' = \hat{r} + \hat{r}_\perp, |\hat{r}''|^2 = 2 \\ |\hat{r}''|^2 = 2/(1 + \hat{r} \cdot \hat{r}') \end{array} \right. ,$$

portanto $0 \leq |\hat{r}''| \leq \sqrt{2}$, assim o comprimento máximo do vetor polarização não é mais constante, ele pode encolher, ou esticar até atingir $\sqrt{2}$, a direção do vetor será ao longo da nova direção $\hat{r} + \hat{r}'$.

A relação de comutação é

$$[\pi(\hat{r}), \pi(\hat{r}')] = \frac{i}{2} (\hat{r} \times \hat{r}') \cdot \vec{\sigma}$$

1.1. Rotação de um projetor

O operador de rotação mais geral no \mathcal{H}_2 (operação unitária) é

$$U(\gamma, \hat{n}) = \exp(i\gamma \hat{n} \cdot \vec{\sigma}/2) = \hat{1} \cos(\gamma/2) + i \hat{n} \cdot \vec{\sigma} \sin(\gamma/2)$$

onde \hat{n} é a direção do eixo, em torno do qual a rotação é efetuada e γ é o ângulo de rotação. A rotação de um projetor tem um significado bastante claro,

$$U(\gamma, \hat{n}) \pi(\hat{r}) U^\dagger(\gamma, \hat{n}) = \pi(\hat{r}')$$

equivale a rodar o eixo de quantização no \mathcal{E}_3 , por causa da transformação

$$\begin{aligned} U(\gamma, \hat{n}) \hat{r} \cdot \vec{\sigma} U^\dagger(\gamma, \hat{n}) &= [\hat{1} \cos(\gamma/2) + i \hat{n} \cdot \vec{\sigma} \sin(\gamma/2)] \hat{r} \cdot \vec{\sigma} [\hat{1} \cos(\gamma/2) - i \hat{n} \cdot \vec{\sigma} \sin(\gamma/2)] \\ &= \cos \gamma \hat{r} \cdot \vec{\sigma} + \sin \gamma \hat{r} \times \hat{n} \cdot \vec{\sigma} + 2 \sin^2(\gamma/2) \hat{n} \cdot \hat{r} \hat{n} \cdot \vec{\sigma} \\ &= [\hat{n} \cdot \hat{r} \hat{n} + \cos \gamma \hat{n} \times (\hat{r} \times \hat{n}) + \sin \gamma \hat{r} \times \hat{n}] \cdot \vec{\sigma} \\ &= \hat{r}' \cdot \vec{\sigma} \end{aligned}$$

que é uma rotação, o novo vetor é

$$\hat{r}' = \hat{R}\hat{r} = \hat{n} \cdot \hat{r} \hat{n} + \cos \gamma \hat{n} \times (\hat{r} \times \hat{n}) + \sin \gamma \hat{r} \times \hat{n}.$$

Pode-se verificar que $|\hat{r}'| = |\hat{r}|$ e que a matriz de rotação no \mathcal{E}_3 pode ser escrita na forma matricial

$$\begin{pmatrix} \hat{r}'_x \\ \hat{r}'_y \\ \hat{r}'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x^2(1 + \cos \gamma) - \cos \gamma & n_x n_y(1 + \cos \gamma) + n_z \sin \gamma \\ n_x n_y(1 + \cos \gamma) - n_z \sin \gamma & n_y^2(1 + \cos \gamma) - \cos \gamma \\ n_x n_z(1 + \cos \gamma) + n_y \sin \gamma & n_y n_z(1 + \cos \gamma) - n_x \sin \gamma \\ n_x n_z(1 + \cos \gamma) - n_y \sin \gamma \\ n_y n_z(1 + \cos \gamma) + n_x \sin \gamma \\ n_z^2(1 + \cos \gamma) - \cos \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{r}_x \\ \hat{r}_y \\ \hat{r}_z \end{pmatrix} \quad (1)$$

com $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$. Constata-se que o ângulo entre os dois vetores é

$$\begin{aligned} \hat{r} \cdot \hat{r}' &= (\hat{n} \cdot \hat{r})^2 + \cos \gamma \hat{r} \cdot \hat{n} \times (\hat{r} \times \hat{n}) + \sin \gamma \hat{r} \cdot \hat{r} \times \hat{n} \\ &= (1 - \cos \gamma) (\hat{n} \cdot \hat{r})^2 + \cos \gamma = \cos \Theta \end{aligned}$$

onde Θ é o ângulo entre os dois vetores no \mathcal{E}_3 .

Parar $\hat{n} = (0, 0, 1)$, uma rotação em torno do eixo z, tem-se

$$\begin{pmatrix} \hat{r}'_x \\ \hat{r}'_y \\ \hat{r}'_z \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{r}_x \\ \hat{r}_y \\ \hat{r}_z \end{pmatrix},$$

note o sinal negativo que multiplica a matriz, pois rotações no \mathcal{H}_2 implicam a rotações em sentido contrário no \mathcal{E}_3 . Mais alguns casos particulares:

Para $\gamma = \pi$,

$$\hat{r}' = \hat{n} \cdot \hat{r} \hat{n} - \hat{n} \times (\hat{r} \times \hat{n}) = 2\hat{n} \cdot \hat{r} \hat{n} - \hat{r}.$$

Para $\gamma = \pi/2$

$$\hat{r}' = \hat{n} \cdot \hat{r} \hat{n} + \hat{r} \times \hat{n}.$$

Para $\gamma = 0, 2\pi$

$$\hat{r}' = \hat{n} \cdot \hat{r} \hat{n} + \hat{n} \times (\hat{r} \times \hat{n}) = \hat{n} \cdot \hat{r} \hat{n} + (\hat{r} - \hat{n} \cdot \hat{r} \hat{n}) = \hat{r}.$$

1.2. O operador densidade

O estado mais geral de um grau de liberdade dicotômico é também chamado operador densidade, cuja forma é bastante similar ao projetor (??)

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \left(\hat{1} + \vec{P} \cdot \vec{\sigma} \right), \quad (2)$$

onde o vetor \vec{P} (polarização) \mathcal{E}_3 satisfaz a desigualdade $|\vec{P}| \leq 1$, quando $|\vec{P}| = 1$, $\hat{\rho}$ é um estado puro (que é também um projetor, outrossim é apenas um estado misto. Suas propriedades são: $Tr \hat{\rho} = 1$, $Tr (\hat{\rho} \vec{\sigma}) = \vec{P}$, $Tr (\hat{\rho})^2 = \left(1 + |\vec{P}|^2\right) / 2 \leq 1$. Vamos admitir que o estado (2) representa um feixe polarizado, de intensidade unitária, ao longo da direção \vec{P} , após passar por um filtro (??) o estado é projetado em um estado puro representado por

$$\hat{\rho}' = \pi(\hat{r}) \hat{\rho} \pi(\hat{r}) = \frac{1 + \hat{r} \cdot \vec{P}}{2} \pi(\hat{r})$$

onde o fator $\left(1 + \hat{r} \cdot \vec{P}\right) / 2$ dá a fração do feixe que atravessou o filtro, ou a probabilidade que uma partícula atravessou o filtro (Qual é a relação com o efeito túnel?).

Para um segundo filtro $\pi(\hat{r}') = \left(\hat{1} + \hat{r}' \cdot \vec{\sigma}\right) / 2$, o novo estado é

$$\hat{\rho}'' = \pi(\hat{r}') \hat{\rho}' \pi(\hat{r}') = \frac{1 + \hat{r}' \cdot \vec{P}}{2} \pi(\hat{r}') \pi(\hat{r}) \pi(\hat{r}')$$

e o produto dos três projetores resulta em

$$\left(\pi(\hat{r}') \pi(\hat{r})\right) \pi(\hat{r}') = \pi(\hat{r}') \left(\pi(\hat{r}) \pi(\hat{r}')\right) = \frac{1 + \hat{r}' \cdot \hat{r}}{2} \pi(\hat{r}'),$$

por conseguinte

$$\hat{\rho}'' = \left(\frac{1 + \hat{r}' \cdot \vec{P}}{2}\right) \left(\frac{1 + \hat{r}' \cdot \hat{r}}{2}\right) \pi(\hat{r}').$$

que apresenta um decréscimo da intensidade ou da probabilidade pelo produto dos fatores

$$\frac{1 + \hat{r}' \cdot \vec{P}}{2} \frac{1 + \hat{r}' \cdot \hat{r}}{2},$$

que nada mais é que a lei de Malus da óptica.

Agora se o operador densidade é rodado $\hat{\rho}_R = U(\gamma, \hat{n}) \hat{\rho} U^\dagger(\gamma, \hat{n}) = \left(\hat{1} + \vec{P}' \cdot \vec{\sigma} \right) / 2$, com $\vec{P}' = \hat{R}(\gamma, \hat{n}) \vec{P}$, o decréscimo na intensidade contará com o produto dos fatores $\left(\left(1 + \hat{r} \cdot \vec{P}' \right) / 2 \right) \left(\left(1 + \hat{r}' \cdot \hat{r} \right) / 2 \right)$.

2. POVM no \mathcal{H}_2

O POVM (*positive operators valued measure*) é um conjunto completo de operadores de medição positivos (não são projetores do tipo von Neumann, o seu conjunto é chamado PVM, de *projective valued measure*) que não são necessariamente ortogonais (o PVM é um caso particular do POVM), formalmente,

$$\hat{1} = \sum_{i=1}^d \pi_i, \quad (\pi_i)^2 = \pi_i, \quad \pi_i \pi_j \neq \pi_i \pi_j.$$

Por exemplo, no \mathcal{H}_2 podemos definir d operadores π_i tal que

$$\sum_{i=1}^d \pi(\hat{r}_i) = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d (\hat{1} + \hat{r}_i \cdot \vec{\sigma}) = \left(\hat{1} + \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \hat{r}_i \cdot \vec{\sigma} \right) = \hat{1}.$$

desde que

$$\sum_{i=1}^d \hat{r}_i = 0.$$

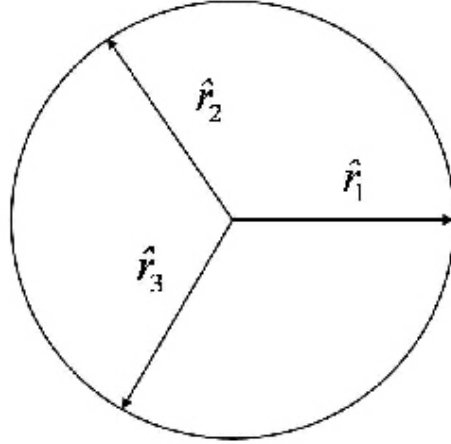
O conjunto de vetores \hat{r}_i no \mathcal{E}_3 deve se distribuir sobre a superfície da esfera, sem serem ortogonais entre si,

$$\hat{r}_i \cdot \hat{r}_j = \hat{r}_j \cdot \hat{r}_i \neq 0, \quad \text{for } i \neq j.$$

Adicionalmente,

$$\text{Tr} \left(\sum_{i=1}^d \pi(\hat{r}_i) \right) = 2$$

Um exemplo de POVM com $d = 3$ é $\left\{ \pi(\hat{r}_i) = \frac{1}{3} (\hat{1} + \hat{r}_i \cdot \vec{\sigma}) \right\}$, fixando os parâmetros $\theta = \pi/2$, $\phi = 0, 2\pi/3, 4\pi/3$ ficamos com três vetores não-ortogonais no plano



$x - y,$

$$\begin{aligned}\hat{r}_1 &= (1, 0, 0) \\ \hat{r}_2 &= \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}, 0\right) \\ \hat{r}_3 &= \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}, 0\right)\end{aligned}$$

veja a Figura ??, note que $\hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2 = \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_3 = \hat{r}_2 \cdot \hat{r}_3 = -1/2$. O POVM é

$$\begin{aligned}\pi(\hat{r}_1) &= 2|\hat{r}_1\rangle\langle\hat{r}_1| = \frac{1}{3}(\hat{1} + \hat{\sigma}_x) \\ \pi(\hat{r}_2) &= 2|\hat{r}_2\rangle\langle\hat{r}_2| = \frac{1}{3}\left(\hat{1} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}_x + \frac{1}{2}\sqrt{3}\hat{\sigma}_y\right) \\ \pi(\hat{r}_3) &= 2|\hat{r}_3\rangle\langle\hat{r}_3| = \frac{1}{3}\left(\hat{1} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}_x - \frac{1}{2}\sqrt{3}\hat{\sigma}_y\right)\end{aligned}$$

ou qualquer combinação pode ser usada.

2.1. Relações de incerteza no POVM

Para quaisquer dois operadores hermiteanos \hat{A} e \hat{B} , ($A^\dagger = A$, $B^\dagger = B$), em geral $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$, vamos considerar os valores médios quadrático em um estado arbitrário $\hat{\rho}$: $\langle \hat{A}^2 \rangle = Tr(\hat{A}^2 \hat{\rho})$, $\langle \hat{B}^2 \rangle = Tr(\hat{B}^2 \hat{\rho})$, $\langle \hat{A}\hat{B} \rangle = Tr(\hat{A}\hat{B}\hat{\rho})$, $\langle \hat{B}\hat{A} \rangle = Tr(\hat{B}\hat{A}\hat{\rho})$. Vale observar que $\langle \hat{A}^2 \rangle = \langle \hat{A}^\dagger \hat{A} \rangle \geq 0$. Vamos escrever a matriz \mathbb{N} associada à forma bilinear dos valores médios,

$$\mathbb{N} = \begin{pmatrix} \langle \hat{A}^2 \rangle & \langle \hat{A}\hat{B} \rangle \\ \langle \hat{B}\hat{A} \rangle & \langle \hat{B}^2 \rangle \end{pmatrix}$$

que é hermiteana, portanto seus autovalores,

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left[\left(\langle \hat{A}^2 \rangle + \langle \hat{B}^2 \rangle \right) \pm \sqrt{\left(\langle \hat{A}^2 \rangle + \langle \hat{B}^2 \rangle \right)^2 - 4 \left(\langle \hat{A}^2 \rangle \langle \hat{B}^2 \rangle - |\langle \hat{A}\hat{B} \rangle|^2 \right)} \right]$$

são sempre reais. A condição de não-negatividade ($\det \mathbb{N} \geq 0$) impõe uma desigualdade na relação entre os valores médios,

$$\langle \hat{A}^2 \rangle \langle \hat{B}^2 \rangle \geq |\langle \hat{A}\hat{B} \rangle|^2.$$

Mas como

$$\begin{aligned} \hat{A}\hat{B} &= \frac{1}{2} \left([\hat{A}, \hat{B}] + \{\hat{A}, \hat{B}\} \right), \\ \hat{B}\hat{A} &= (\hat{A}\hat{B})^\dagger = \frac{1}{2} \left(-[\hat{A}, \hat{B}] + \{\hat{A}, \hat{B}\} \right) \end{aligned}$$

obtemos

$$|\langle \hat{A}\hat{B} \rangle|^2 = \langle \hat{A}\hat{B} \rangle \langle \hat{B}\hat{A} \rangle = \frac{1}{4} \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] + \{\hat{A}, \hat{B}\} \rangle \right|^2 = \frac{1}{4} \left(\left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right|^2 + \left| \langle \{\hat{A}, \hat{B}\} \rangle \right|^2 \right),$$

ou

$$\langle \hat{A}^2 \rangle \langle \hat{B}^2 \rangle \geq \frac{1}{4} \left(\left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right|^2 + \left| \langle \{\hat{A}, \hat{B}\} \rangle \right|^2 \right).$$

Para as variâncias ($\Delta \hat{A} = \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle$) e $\Delta \hat{A}^2 = (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)^2$, o mesmo valendo para \hat{B} , os autovalores da matriz de variâncias não podem ser negativos, assim

obtém-se a relação de incerteza de Robertson-Schrödinger

$$\langle \Delta \hat{A}^2 \rangle \langle \Delta \hat{B}^2 \rangle \geq \frac{1}{4} \left(\left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right|^2 + \left| \langle \{ \Delta \hat{A}, \Delta \hat{B} \} \rangle \right|^2 \right).$$

que é mais restritiva que a relação de incerteza de Heisenberg. Para os projetores $\hat{A} = \pi(\hat{r})$, $\hat{B} = \pi(\hat{r}')$, temos

$$\begin{aligned} \langle \Delta \pi(\hat{r})^2 \rangle \langle \Delta \pi(\hat{r}')^2 \rangle &\geq \frac{1}{4} \left(\left| \langle [\pi(\hat{r}), \pi(\hat{r}')] \rangle \right|^2 + \left| \langle \{ \Delta \pi(\hat{r}), \Delta \pi(\hat{r}') \} \rangle \right|^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\left| \langle \hat{r} | \hat{r}' \rangle \right|^2 \left| \langle M(\hat{r}, \hat{r}') \rangle - \langle M^\dagger(\hat{r}, \hat{r}') \rangle \right|^2 + \left| \langle \{ \Delta \pi(\hat{r}), \Delta \pi(\hat{r}') \} \rangle \right|^2 \right) \\ &= \left| \langle \hat{r} | \hat{r}' \rangle \right|^2 \left| \text{Im} \langle M(\hat{r}, \hat{r}') \rangle \right|^2 + \frac{1}{4} \left| \langle \{ \Delta \pi(\hat{r}), \Delta \pi(\hat{r}') \} \rangle \right|^2, \end{aligned}$$

observa-se que o filtro seletivo $M(\hat{r}, \hat{r}')$ está presente no lado direito da desigualdade. Obter o limite inferior em termos de \hat{r} e \hat{r}' . Qual é a expressão do limite inferior se \hat{r}' é obtida por uma rotação de \hat{r} ? E por outra transformação que não seja uma rotação?

2.2. Exemplos de POVM

Exemplo 1: Alice telefona a Beto informando-o de que ela estará lhe mandando uma seqüência de estados de um conjunto constituído dos dois estados não-ortogonais

$$|\psi_1\rangle = |-z\rangle, \quad \text{ou} \quad |\psi_2\rangle = \frac{|z\rangle + |-z\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Como Beto poderá saber qual dos dois estados estará recebendo de Alice? Que tipo de medição ele terá que fazer para obter essa informação? Quais as ferramentas de medição ele terá que construir? Se ele usar um PVM, os operadores projetivos $\pi_- = |-z\rangle\langle -z|$ e $\pi_+ = |z\rangle\langle z|$ ($\pi_- + \pi_+ = \hat{I}$) como ferramentas, certamente ele cometerá um erro, por causa da ambigüidade

$$p_0^{(1)} = \langle \psi_1 | \pi_- | \psi_1 \rangle = 1, \quad \text{e} \quad p_0^{(2)} = \langle \psi_2 | \pi_- | \psi_2 \rangle = \frac{1}{2},$$

ou seja não há exclusividade mútua na medição dos estados.

Se compararmos π_- a uma “lâmpada” que emite luz vermelha quando acesa, π_- acenderá para os dois estados, embora para o estado $|\psi_2\rangle$ a chance de acender seja de 50%. No caso “lâmpada” π_+ , que emite luz azul, temos

$$p_-^{(1)} = \langle \psi_1 | \pi_+ | \psi_1 \rangle = 0, \quad \text{e} \quad p_1^{(2)} = \langle \psi_2 | \pi_+ | \psi_2 \rangle = \frac{1}{2},$$

e verificamos que aqui há exclusividade, a “lâmpada” π_+ nunca acenderá para o estado $|\psi_1\rangle$, mas haverá 50% de chance em acender para o estado $|\psi_2\rangle$.

Agora Beto contrói as ferramentas que formam um POVM

$$\begin{aligned} \hat{A}_1 &= | +z \rangle \langle +z | = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (\hat{1} - \hat{\sigma}_z) = \pi(\hat{r}_1) \\ \hat{r}_1 &= (0, 0, -1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{A}_2 &= \frac{1}{2} (|-z\rangle - |+z\rangle) (\langle -z| - \langle +z|) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (\hat{1} - \hat{\sigma}_x) = \pi(\hat{r}_2) \\ \hat{r}_2 &= (-1, 0, 0) \end{aligned}$$

$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \frac{1}{2} (1 - \hat{\sigma}_z) + \frac{1}{2} (1 - \hat{\sigma}_x) = \hat{1} - \frac{1}{2} (\hat{\sigma}_z + \hat{\sigma}_x)$$

$$\begin{aligned} \hat{A}_3 &= \hat{1} - \hat{A}_1 - \hat{A}_2 = \frac{1}{2} (\hat{\sigma}_z + \hat{\sigma}_x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_z) \right] - \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_z) \right] \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\pi(\hat{r}_3) - \pi(\hat{r}_4)] = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\hat{r}_3\rangle \langle \hat{r}_3| - |\hat{r}_4\rangle \langle \hat{r}_4|) \end{aligned}$$

$$\hat{r}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad \hat{r}_4 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad \hat{r}_3 \cdot \hat{r}_4 = -1$$

uma vez que são todos positivos $\|\hat{A}_i\| \geq 0$. Pode-se supor que \hat{A}_1 , \hat{A}_2 , e \hat{A}_3 são três lâmpadas que podem acender uma luz nas cores, vermelha, azul e verde respectivamente. Se Alice mandou o estado $|\psi_1\rangle = |-z\rangle$, então

$$\begin{aligned} p_1^{(1)} &= \langle \psi_1 | \hat{A}_1 | \psi_1 \rangle = 0, \quad p_2^{(1)} = \langle \psi_1 | \hat{A}_2 | \psi_1 \rangle = \frac{1}{2} \quad \text{e} \\ p_3^{(1)} &= \langle \psi_1 | \hat{A}_3 | \psi_1 \rangle = 1 - p_2^{(1)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

e se Alice mandou o estado $|\psi_2\rangle$ tem-se

$$\begin{aligned} p_1^{(2)} &= \langle \psi_2 | \hat{A}_1 | \psi_2 \rangle = \frac{1}{2}, & p_2^{(2)} &= \langle \psi_2 | \hat{A}_2 | \psi_2 \rangle = 0 \quad \text{e} \\ p_3^{(2)} &= \langle \psi_2 | \hat{A}_3 | \psi_2 \rangle = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Agora \hat{A}_1 e \hat{A}_2 são mutuamente exclusivos, sempre que a lâmpada \hat{A}_1 (\hat{A}_2) “acender” isto significa que a Alice mandou, e Beto recebeu, o estado $|\psi_1\rangle$ ($|\psi_2\rangle$). Se o elemento \hat{A}_3 “acender” nada haverá de conclusivo, nada poderá ser dito acerca do estado que Alice mandou, mas também não ocorrerá nenhum equívoco sobre o estado mandado por Alice.

Exemplo 2: Para dois estados não-ortogonais, representando os estados de polarização de um fóton, $|\hat{r}_1\rangle$, $|\hat{r}_2\rangle$, $\langle \hat{r}_1 | \hat{r}_2 \rangle \neq 0$, as medições que permitem discernir os estados são implementadas com um POVM, selecionando o POVM com três elementos,

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\hat{1} - \pi(\hat{r}_2)}{1 + \langle \hat{r}_1 | \hat{r}_2 \rangle} = \frac{\hat{1} - |\hat{r}_2\rangle \langle \hat{r}_2|}{1 + \langle \hat{r}_1 | \hat{r}_2 \rangle} \\ A_2 &= \frac{\hat{1} - \pi(\hat{r}_1)}{1 + \langle \hat{r}_1 | \hat{r}_2 \rangle} = \frac{\hat{1} - |\hat{r}_1\rangle \langle \hat{r}_1|}{1 + \langle \hat{r}_1 | \hat{r}_2 \rangle} \\ A_3 &= \hat{1} - A_1 - A_2 \end{aligned}$$

construídos a partir da combinação de dois projetores não-ortogonais $\pi(\hat{r}_1)$ e $\pi(\hat{r}_2)$, note-se que o terceiro elemento não está definido, sua presença representa o complemento da unidade, e também admite-se o que o produto interno é real

$$\langle \hat{r}_1 | \hat{r}_2 \rangle = \cos \chi$$

As relações de comutação entre os três elementos fornecem os mesmos valores

$$\begin{aligned} [A_1, A_2] &= [A_3, A_1] = [A_2, A_3] = \frac{1}{(1 + \cos \chi)^2} [\pi(\hat{r}_2), \pi(\hat{r}_1)] \\ &= -\frac{i\hat{r}_1 \times \hat{r}_2}{2(1 + \cos \chi)^2} \cdot \vec{\sigma} = i\frac{\sin \chi}{2(1 + \cos \chi)^2} \sigma_z. \end{aligned}$$

Para um fóton em um estado de polarização arbitrária,

$$|\psi\rangle = \alpha |\hat{r}_1\rangle + \beta |\hat{r}_2\rangle,$$

a condição de normalização estabelece uma relação entre os coeficientes α e β e o parâmetro χ

$$\begin{aligned}\langle\psi|\psi\rangle &= (\alpha^* \langle\hat{r}_1| + \beta^* \langle\hat{r}_2|) (\alpha |\hat{r}_1\rangle + \beta |\hat{r}_2\rangle) \\ &= |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2 \cos \chi \operatorname{Re}(\alpha^* \beta) = 1.\end{aligned}$$

As probabilidades de detecção ao longo de cada eixo de polarização do aparato de detecção são dadas por

$$\begin{aligned}P_1 &= \langle\psi|A_1|\psi\rangle = \frac{1}{1 + \cos \chi} [\langle\psi|\hat{1} - \pi(\hat{r}_2)|\psi\rangle] = |\alpha|^2 (1 - \cos \chi) \\ P_2 &= \langle\psi|A_2|\psi\rangle = \frac{1}{1 + \cos \chi} [\langle\psi|\hat{1} - \pi(\hat{r}_1)|\psi\rangle] = |\beta|^2 (1 - \cos \chi) \\ P_3 &= \langle\psi|A_3|\psi\rangle = 1 - (|\alpha|^2 + |\beta|^2) (1 - \cos \chi) = |\alpha + \beta|^2 \cos \chi\end{aligned}$$

com

$$P_1 + P_2 + P_3 = 1$$

Acontece que se o fóton é detectado no estado $|\psi\rangle = |\hat{r}_1\rangle$, visto que $\beta = 0$ então $P_2 = 0$ e $P_1 = (1 - \cos \chi)$, enquanto que $P_3 = \cos \chi$ (condição de inconclusividade), isto apenas significa que o fóton não estava no estado $|\hat{r}_2\rangle$. Se olharmos para os detectores, o número 2 nada acusa. Contrariamente, se $|\psi\rangle = |\hat{r}_2\rangle$, então $P_1 = 0$ and $P_2 = (1 - \cos \chi)$, e $P_3 = \cos \chi$ é a condição de inconclusividade, dizendo apenas que o fóton não estava no estado $|\hat{r}_1\rangle$.

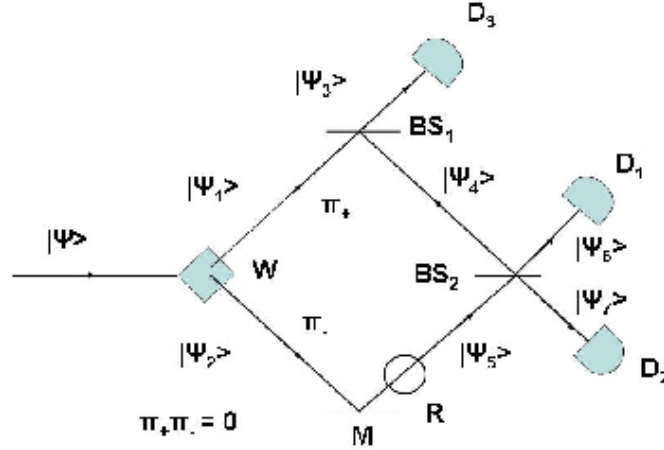
3. Implementação óptica do exemplo 2

Considera-se o esquema da Figura 3e definem-se os estados $\hat{r}_1 \cdot \vec{\sigma} |\hat{r}_1\rangle = |\hat{r}_1\rangle$, $\hat{r}_2 \cdot \vec{\sigma} |\hat{r}_2\rangle = |\hat{r}_2\rangle$, com o fóton no estado

$$|\psi\rangle = \alpha |\hat{r}_1\rangle + \beta |\hat{r}_2\rangle.$$

O fóton incide sobre um prisma de Wollaston – que funciona como um filtro quanto à polarização do fóton – o fóton pode seguir pelo caminho 1 ou pelo 2; se seguir via 1, em \mathcal{H}_2 seu estado é projetado para $|\psi_1\rangle = \pi(\hat{r}_+) |\psi\rangle$ e no \mathcal{E}_3 seu vetor de polarização é projetado ao longo da direção \hat{r}_+ . Porém se o fóton seguir pelo caminho 2 seu estado será projetado para $|\psi_2\rangle = \pi(\hat{r}_-) |\psi\rangle$, e o seu vetor polarização será projetado ao longo da direção \hat{r}_- . Adicionalmente, $\pi(\hat{r}_+) \pi(\hat{r}_-) = \pi(\hat{r}_-) \pi(\hat{r}_+) = 0$

implementation



2.jpg

e $\pi(\hat{r}_-) + \pi(\hat{r}_+) = 1$, as projeções are mutuamente exclusivas e complementares. Os projetores, que são uma propriedade do prisma de Wollaston são

$$\pi(\hat{r}_+) = \frac{|\hat{r}_1\rangle + |\hat{r}_2\rangle}{\| |\hat{r}_1\rangle + |\hat{r}_2\rangle \|} \frac{\langle \hat{r}_1 | + \langle \hat{r}_2 |}{\| \langle \hat{r}_1 | + \langle \hat{r}_2 | \|}$$

e

$$\pi(\hat{r}_-) = \frac{|\hat{r}_1\rangle - |\hat{r}_2\rangle}{\| |\hat{r}_1\rangle - |\hat{r}_2\rangle \|} \frac{\langle \hat{r}_1 | - \langle \hat{r}_2 |}{\| \langle \hat{r}_1 | - \langle \hat{r}_2 | \|}.$$

Para $|\langle \hat{r}_1 | \hat{r}_2 \rangle| = |\cos \chi|$, temos

$$\begin{aligned} |\langle \hat{r}_1 | \hat{r}_2 \rangle| &= |\cos(\theta_1/2) \cos(\theta_2/2) + e^{-i(\phi_1 - \phi_2)} \sin(\theta_1/2) \sin(\theta_2/2)| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [1 + \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)]^{1/2} \\ &= \left(\frac{1 + \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2}{2} \right)^{1/2} = \left(\frac{1 + \cos \Theta}{2} \right)^{1/2} = |\cos \chi| \end{aligned}$$

e uma relação se estabelece entre os produtos internos de vetores no \mathcal{H}_2 e no \mathcal{E}_3 ,

$$|\cos \chi| = |\cos \Theta/2|.$$

$0 \leq \Theta \leq \pi$, $0 \leq \chi \leq \pi/2$, χ é um ângulo no \mathcal{H}_2 , e θ_1 and θ_2 são ângulos no \mathcal{E}_3 . A fim de que o produto interno das superposições $(|\hat{r}_1\rangle + |\hat{r}_2\rangle)$ e $(|\hat{r}_1\rangle - |\hat{r}_2\rangle)$ resulte nulo (condição de vetores mutuamente exclusivos)

$$\begin{aligned} (\langle \hat{r}_1 | + \langle \hat{r}_2 |) (|\hat{r}_1\rangle - |\hat{r}_2\rangle) &= 1 - 1 - (\langle \hat{r}_1 | \hat{r}_2\rangle - \langle \hat{r}_2 | \hat{r}_1\rangle) \\ &= -2 \operatorname{Im} \langle \hat{r}_1 | \hat{r}_2\rangle \\ &= 2 \sin(\phi_1 - \phi_2) \sin(\theta_1/2) \sin(\theta_2/2) \end{aligned}$$

fixa-se $\phi_1 = \phi_2$ (isto significa que os vetores unitários \hat{r}_1 and \hat{r}_2 no \mathcal{E}_3 estão em um plano perpendicular ao plano $x - y$, $\theta_1 - \theta_2 = \Theta$). Por outro lado, pode-se normalizar esses vetores,

$$\begin{aligned} (\langle \hat{r}_1 | + \langle \hat{r}_2 |) (|\hat{r}_1\rangle + |\hat{r}_2\rangle) &= \sqrt{2}(1 + \cos \chi) = 2 \cos^2(\chi/2) \\ (\langle \hat{r}_1 | - \langle \hat{r}_2 |) (|\hat{r}_1\rangle - |\hat{r}_2\rangle) &= \sqrt{2}(1 - \cos \chi) = 2 \sin^2(\chi/2), \end{aligned}$$

assim

$$\pi(\hat{r}_\pm) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}(1 \pm \cos \chi)} (|\hat{r}_1\rangle \pm |\hat{r}_2\rangle) \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}(1 \pm \cos \chi)} (\langle \hat{r}_1 | \pm \langle \hat{r}_2 |) \right).$$

Denotando

$$|\hat{r}_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}(1 \pm \cos \chi)} (|\hat{r}_1\rangle \pm |\hat{r}_2\rangle)$$

os estados dos fótons ao longo dos diversos segmentos de trajetórias na Figura 3 são

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= \pi(\hat{r}_+) |\psi\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}(1 + \cos \chi)} (\langle \hat{r}_1 | \psi\rangle + \langle \hat{r}_2 | \psi\rangle) \right) |\hat{r}_1 + \hat{r}_2\rangle \\ &= \frac{(\alpha + \beta)(1 + \cos \chi)^{1/2}}{\sqrt{2}} |\hat{r}_1 + \hat{r}_2\rangle \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |\psi_2\rangle &= \pi(\hat{r}_-) |\psi\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}(1 - \cos \chi)} (\langle \hat{r}_1 | \psi\rangle - \langle \hat{r}_2 | \psi\rangle) \right) |\hat{r}_1 - \hat{r}_2\rangle \\ &= \frac{(\alpha - \beta)(1 - \cos \chi)^{1/2}}{\sqrt{2}} |\hat{r}_1 - \hat{r}_2\rangle. \end{aligned}$$

Agora deve-se escolher o coeficiente de transmissão do separador de feixes BS₁, mas devemos nos recordar que a probabilidade de detecção no detector D₃ deve ser $P_3 = \langle \psi | A_3 | \psi \rangle = |\alpha + \beta|^2 \cos \chi$, assim, necessariamente, a menos de um fator de fase, o estado $|\psi_3\rangle$ é

$$|\psi_3\rangle = |\alpha + \beta| \cos^{1/2} \chi |\hat{r}_1 + \hat{r}_2\rangle$$

o que possibilita fazer a escolha de um separador de feixes com coeficientes de transmissão e reflexão

$$\begin{aligned} T &= \frac{\langle \psi_3 | \psi_3 \rangle}{\langle \psi_1 | \psi_1 \rangle} = 1 - \tan^2 (\chi/2) \\ R &= 1 - T = \tan^2 (\chi/2). \end{aligned}$$

Prosseguindo, no trecho seguinte o fóton estará no estado

$$\begin{aligned} |\psi_4\rangle &= i\sqrt{R} |\psi_1\rangle = i \tan (\chi/2) \frac{(\alpha + \beta) (1 + \cos \chi)^{1/2}}{\sqrt{2}} |\hat{r}_1 + \hat{r}_2\rangle \\ &= \frac{i}{\sqrt{2}} (\alpha + \beta) (1 - \cos \chi)^{1/2} |\hat{r}_1 + \hat{r}_2\rangle. \end{aligned}$$

O "rotador" transforma o estado $|\hat{r}_1 - \hat{r}_2\rangle$ em $-|\hat{r}_1 + \hat{r}_2\rangle$, logo o estado ao longo do caminho simétrico é

$$|\psi_5\rangle = U_R |\psi_2\rangle = -\frac{(\alpha - \beta) (1 - \cos \chi)^{1/2}}{\sqrt{2}} |\hat{r}_1 + \hat{r}_2\rangle.$$

Escolhe-se o separador de feixes BS₂ com transmissão 50% : 50%, logo,

$$\begin{aligned} |\psi_6\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_5\rangle + i|\psi_4\rangle) = -\alpha (1 - \cos \chi)^{1/2} |\hat{r}_1 + \hat{r}_2\rangle \\ |\psi_7\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_4\rangle + i|\psi_5\rangle) = i\beta (1 - \cos \chi)^{1/2} |\hat{r}_1 + \hat{r}_2\rangle \end{aligned}$$

E as probabilidades de detecção são aquelas propostas na subseção anterior,

$$\begin{aligned} P_1 &= \langle \psi | A_1 | \psi \rangle = \langle \psi_6 | \psi_6 \rangle = \alpha^2 (1 - \cos \chi) \\ P_2 &= \langle \psi | A_2 | \psi \rangle = \langle \psi_7 | \psi_7 \rangle = \beta^2 (1 - \cos \chi) \end{aligned}$$

4. Teorema de Neumark (Naimark)

Considere os mesmos dois estados

$$\begin{aligned} |\hat{u}\rangle &= |\hat{r}_1 + \hat{r}_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1 + \cos \chi)}} (|\hat{r}_1\rangle + |\hat{r}_2\rangle) \\ |\hat{v}\rangle &= |\hat{r}_1 - \hat{r}_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1 - \cos \chi)}} (|\hat{r}_1\rangle - |\hat{r}_2\rangle) \end{aligned}$$

ou na forma matricial

$$\begin{pmatrix} |\hat{u}\rangle \\ |\hat{v}\rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2(1 + \cos \chi)}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\hat{r}_1\rangle \\ |\hat{r}_2\rangle \end{pmatrix},$$

a transformação inversa é

$$\begin{pmatrix} |\hat{r}_1\rangle \\ |\hat{r}_2\rangle \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{(1 + \cos \chi)}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\hat{u}\rangle \\ |\hat{v}\rangle \end{pmatrix}.$$

Nada foi dito dos estados $|\hat{r}_1\rangle$ e $|\hat{r}_2\rangle$, além do produto $\langle \hat{r}_1 | \hat{r}_2 \rangle = \cos \chi$, assim vamos estender o \mathcal{H}_2 para \mathcal{H}_3 e escrever

$$\begin{aligned} |\hat{r}_1\rangle &= (1 - \cos \chi)^{1/2} |x\rangle + \cos^{1/2} \chi |z\rangle \\ |\hat{r}_2\rangle &= (1 - \cos \chi)^{1/2} |y\rangle + \cos^{1/2} \chi |z\rangle \end{aligned}$$

ou

$$\begin{pmatrix} |\hat{r}_1\rangle \\ |\hat{r}_2\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - \cos \chi)^{1/2} & 0 & \cos^{1/2} \chi \\ 0 & (1 - \cos \chi)^{1/2} & \cos^{1/2} \chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |x\rangle \\ |y\rangle \\ |z\rangle \end{pmatrix}$$

a transformação é feita por uma matriz 2×3 , onde

$$|x\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |y\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |z\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

são os vetores de base ortogonal em \mathcal{H}_3 . Veja a Figura 1 para a localização dos vetores $|\hat{r}_1\rangle$ e $|\hat{r}_2\rangle$ no \mathcal{H}_3 .

E portanto

$$|\hat{u}\rangle = \sqrt{\frac{1 - \cos \chi}{1 + \cos \chi}} \left(\frac{|x\rangle + |y\rangle}{\sqrt{2}} \right) + \sqrt{\frac{2 \cos \chi}{1 + \cos \chi}} |z\rangle$$

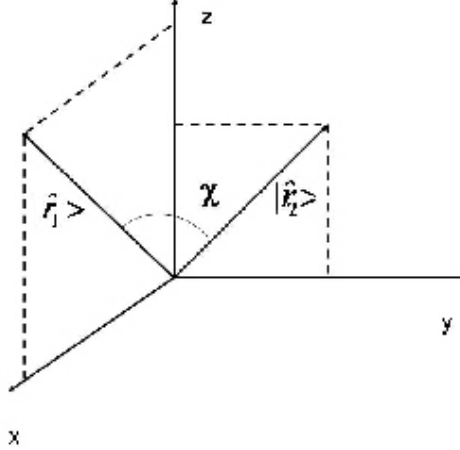


Figure 1: Posição dos vetores $|\hat{r}_1\rangle$ e $|\hat{r}_2\rangle$ no espaço de Hilbert estendido 3D.

$$|\hat{v}\rangle = \frac{|x\rangle - |y\rangle}{\sqrt{2}},$$

ou,

$$\begin{pmatrix} |\hat{u}_1\rangle \\ |\hat{u}_2\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1-\cos\chi}{1+\cos\chi}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1-\cos\chi}{1+\cos\chi}} & \sqrt{\frac{2\cos\chi}{1+\cos\chi}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |x\rangle \\ |y\rangle \\ |z\rangle \end{pmatrix}$$

as posições dos vetores $|\hat{u}\rangle$ e $|\hat{v}\rangle$ no \mathcal{H}_3 podem ser vistas na Figura 2, compare com a posição dos vetores $|\hat{r}_1\rangle$ e $|\hat{r}_2\rangle$ na Figura 1.

Agora escrever um PVM cujos elementos são projetores elementares ortogonais do tipo von Neumann,

$$D_x = |x\rangle\langle x|, \quad D_y = |y\rangle\langle y|, \quad D_z = |z\rangle\langle z|.$$

Vamos calcular os valores médios desses projetores no estado $|\psi\rangle$, $\langle\psi|D_k|\psi\rangle$,

$$\begin{aligned} P_x &= \langle\psi|D_x|\psi\rangle = |\langle x|\psi\rangle|^2 = |\alpha|^2 |\langle x|\hat{r}_1\rangle|^2 = \\ &= |\alpha|^2 (1 - \cos\chi) = P_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_y &= \langle\psi|D_y|\psi\rangle = |\langle y|\psi\rangle|^2 = |\beta|^2 |\langle y|\hat{r}_2\rangle|^2 = \\ &= |\beta|^2 (1 - \cos\chi) = P_2 \end{aligned}$$

u-v

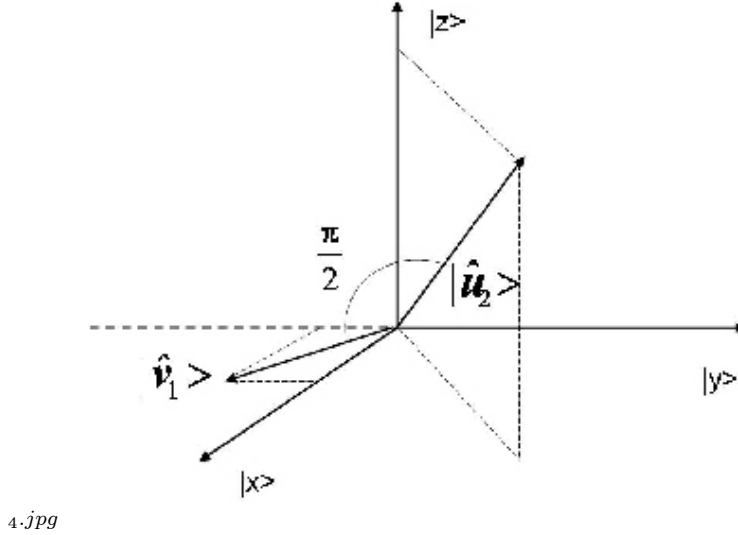


Figure 2: Posições dos vetores $|\hat{u}\rangle$ e $|\hat{v}\rangle$ no espaço de Hilbert estendido para 3D.

e

$$\begin{aligned} P_z &= \langle \psi | D_z | \psi \rangle = |\langle z | \psi \rangle|^2 = |\alpha \langle z | \hat{r}_1 \rangle + \beta \langle z | \hat{r}_2 \rangle|^2 \\ &= |\alpha + \beta| \cos \chi = P_3 \end{aligned}$$

Portanto o POVM $\{A_1, A_2 \text{ e } A_3 = 1 - A_1 - A_2\}$ \mathcal{H}_2 é mapeado no PVM $\{D_x, D_y, D_z\}$ no \mathcal{H}_3 , cujos elementos são projetores de detecção. No \mathcal{H}_3 estão imersos os vetores de base não-ortogonais $|\hat{r}_1\rangle$ e $|\hat{r}_2\rangle$ (que definem um plano) e os vetores ortogonais $|\hat{u}\rangle$ e $|\hat{v}\rangle$ definem um outro plano.

4.1. Em termos de matriz densidade

Vamos considerar um sistema S e um sistema auxiliar (ancilla) A , cujos estados são ρ_S e ρ_A , e estabelecemos que, inicialmente, eles não estão emaranhados; a seguir ambos interagem e se emaranham por meio de uma operação unitária

$$\rho_{SA} = U (\rho_S \otimes \rho_A) U^\dagger$$

Agora faz-se uma medição padrão no ancilla A de uma propriedade \mathcal{D} com autovalores d , caracterizada pelo operador

$$I_S \otimes \pi_d(A),$$

onde $\pi_d(A)$ é um projetor, $\pi_d(A)\pi_{d'}(A) = \pi_d(A)\delta_{d,d'}$, $\pi_d^\dagger(A) = \pi_d(A)$. Uma pergunta natural é: qual é a probabilidade de fazer um medição no sistema ρ_{SA} e encontrar um valor d ?

$$\begin{aligned}
P_d &= Tr_{SA} (I_S \otimes \pi_d(A) U \rho_S \otimes \rho_A U^\dagger I_S \otimes \pi_d(A)) \\
&= Tr_{SA} (U \rho_S \otimes \rho_A U^\dagger I_S \otimes \pi_d(A)) \\
&= Tr_{SA} (\rho_S \otimes \rho_A U^\dagger I_S \otimes \pi_d(A) U) \\
&= Tr_S \rho_S [Tr_A (\rho_A U^\dagger I_S \otimes \pi_d(A) U)]
\end{aligned}$$

agora define-se

$$\hat{A}_d = [Tr_A (\rho_A U^\dagger I_S \otimes \pi_d(A) U)],$$

obtendo-se

$$P_d = Tr_S (\rho_S \hat{A}_d)$$

- (1) Não há uma quantidade definida de operadores \hat{A}_d ,
- (2) Não são necessariamente ortogonais,

$$\hat{A}_d \hat{A}_{d'} \neq \delta_{d,d'}$$

- (3) Eles formam um conjunto completo, sua soma resolve a unidade,

$$\begin{aligned}
\sum_d \hat{A}_d &= Tr_A \left(\rho_A U^\dagger I_S \otimes \left(\sum_d \pi_d(A) \right) U \right) \\
&= Tr_A (\rho_A U^\dagger I_S \otimes I_A U) = Tr_A (\rho_A) = \hat{1}.
\end{aligned}$$

- (4) Para qualquer conjunto POVM $\{A_d\}$ pode-se encontrar um ancilla ρ_A e transformações U .